Untersuchungen
über den veränderlichen Wärmezustand eines Cylinders und eines Körpers, welcher durch Achsenschnitte aus einem Cylinder entsteht.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Fakultät zu Marburg

eingereicht von

Oskar Melchior

aus Schleiz.

Marburg
1884.

I. Allgemeine Bemerkungen zu den nachstehenden Wärme-Problemen.

Die Aufgaben über die Berechnung der Wärmezustände von Körpern (es seien diese Zustände mit der Zeit veränderliche oder stationäre Endzustände) lassen sich in folgendes mathematische Gewand kleiden: Es soll die für den zu berechnenden Körper gültige Differentialgleichung aufgestellt und integrirt werden. Dieselbe ist eine partielle und hat viele partikuläre Lösungen, welche in der Weise zu verwenden sind, dass sie die noch ausserdem gegebenen Nebenbedingungen erfüllen. Diese Bedingungen bestehen bei homogenen, unkrystallinischen Körpern aus Gleichungen, welche die Temperaturverhältnisse entweder des ganzen Körpers zu einer bestimmten Zeit oder der Oberflächen des Körpers (mag durch dieselben die Wärme leitend oder strahlend hindurchgehen) von vorne herein festsetzen. Soll z. B. eine Begrenzungsfläche des Körpers beständig auf der Temperatur 0 erhalten werden, d. h. soll eine Funktion, die den Wärmezustand des gegebenen Körpers ausdrückt, für alle Punkte dieser Fläche verschwinden, so müssen wir aus den partikulären Lösungen, aus welchen unsere Funktion zusammengesetzt werden soll, solche auswählen, die unsrer Funktion diese Eigenschaft verleihen.

Wenn der gegebene Körper eine solche Gestalt besitzt, dass er gedacht werden kann als Teil eines anderen, durch gewisse symmetrische Schnitte zerlegten Körpers, so kann man häufig, nach einem von Lamé eingeschlagenen Wege, die Berechnung des Wärmezustandes des erstgenannten Körpers auf diejenige des anderen Körpers zurückführen. Es sei, um ein bestimmtes Beispiel vor Augen zu haben, der Wärmezustand in einem Prisma mit quadratischer Grundfläche, dessen eine Ecke im Anfangspunkte eines rechtwinkeligen Coordinatensystems liege, und dessen dort zusammentreffende Kanten in den Coordinatenachsen liegen, wobei die Coordinate z mit der Höhenkante des Prismas zusammenfalle, in der Weise ge-

geben, dass in einem Punkte (x, y, z) dieselbe Temperatur herrsche, wie in demjenigen Punkte, welchen man erhält, wenn man, dasselbe z beibehaltend, einen zweiten Punkt so wählt, dass dessen x-Coordinate gleich der Länge der y-Coordinate des ersten Punktes, und dessen y-Coordinate gleich der Länge der x-Coordinate des ersten Punktes wird. Je zwei solche Punkte des Prismas, die durch Vertauschung ihrer x- und y-Coordinaten erhalten wurden, liegen symmetrisch zu der Diagonalebene $x-y=0$, sind also gegenseitige Spiegelbilder. Lassen wir nun dieses Prisma in seiner Umgebung gleichmässig erkalten, so wird dies, vermöge unseres gegebenen symmetrischen Anfangszustandes, in der Weise geschehen, dass durch die Ebene $x-y=0$ keine Wärme hindurchgeht. Eine in dieser Weise gegebene Wärmeverteilung wollen wir eine „direct symmetrische" nennen.

Hätten wir die Anfangstemperatur des Prismas so gewählt, dass wir in den zur Ebene $x-y=0$ symmetrisch gelegenen Punkten zwar absolut dieselbe Temperatur, aber mit entgegengesetzten Zeichen, angebracht hätten, welche Wärmeverteilung wir „invers symmetrisch" nennen wollen, so würde die Erkaltung des Prismas so vor sich gehen, dass während derselben auf der ganzen Ebene $x-y=0$ die Temperatur 0 herrschen würde. Eine solche Ebene, wie hier $x-y=0$, die zu beiden Seiten symmetrisch gelegene Temperaturverhältnisse hat, wollen wir einen „Symmetrieschnitt" nennen.

Vorstehende Bemerkungen hat Lamé [1]) gemacht und sie zur Berechnung des Wärmezustandes von Prismen und Pyramiden angewandt, die durch Symmetrieschnitte aus solchen Prismen entstehen, deren Wärmezustände schon berechnet sind. Unsere Aufgabe sei es jetzt, Aehnliches bei dem Kreiscylinder durchzuführen. Es muss aber sogleich bemerkt werden, dass der Wärmezustand der durch Symmetrieschnitte entstandenen Körper nur berechenbar ist, wenn die Erkaltung derselben, auf den Symmetrieschnitten wenigstens, durch Mitteilung erfolgt, denn auf diesen kann ja niemals eine Strahlung stattfinden.

Die Symmetrieschnitte, deren wir uns beim unendlich langen Cylinder bedienen werden, sind Ebenen, die entweder durch die Achse des Cylinders gelegt werden oder senkrecht zu ihr, wodurch ein endlicher Cylinder sich ergibt. Wir wollen einen Körper, der durch Achsenschnitte aus einem Cylinder entsteht, einen „Cylinderausschnitt" nennen.

Bei allen nachstehenden Rechnungen machen wir folgende beide Voraussetzungen: 1) Die Fortbewegung der Wärme in einem festen oder flüssigen Körper geschieht durch unmittelbares Ueberfliessen von einem Körperelement auf das andere, desgleichen von ihm auf die Umgebung des Körpers. 2) Der Wärmeaustausch zweier benachbarter Körperelemente ist proportional ihrer Temperatur-Differenz.

---

[1]) Lamé, Leçons sur la théorie analyt. de la chaleur, 1861, p. 115 etc.

II. Berechnung des veränderlichen Wärmezustandes eines unendlich langen Cylinderausschnitts.

1. Gliederung der Aufgabe.

Es sei vermittelst zweier, den Winkel $\frac{\pi}{n}$ einschliessender Achsenschnitte (n sei immer eine ganze Zahl) ein Cylinderausschnitt hergestellt worden. Die Punkte desselben seien auf die Coordinaten r, φ und z bezogen, wo z mit der Achse des Cylinders zusammenfalle, und r und φ die Polarkoordinaten des Querschnitts sind. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, in welchem der zu berechnende Wärmezustand Z des Cylinderausschnitts von der Coordinate z unabhängig ist; alsdann gilt die Gleichung der Wärmebewegung

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} \quad \ldots \quad (1)$$

wo der eigentlich noch hinzutretende konstante Faktor der rechten Seite, welcher das Verhältnis der inneren Wärmeleitungsfähigkeit zur Dichte und specifischen Wärme ausdrückt, gleich *1* gesetzt ist. Ferner sei die Anfangserwärmung des Cylinderausschnitts gegeben durch die Bedingung

$$Z_{t=0} = f(r,\varphi). \quad \ldots \quad (2)$$

Die Abkühlung resp. Erwärmung des Körpers geschehe nun in der Weise, dass an seinen drei hier in Betracht kommenden Begrenzungsflächen $r = R$ (R sei der Radius des Cylinders), $\varphi = o$ und $\varphi = \frac{\pi}{n}$ die gegebenen, konstanten Temperaturen $g(\varphi)$, $g_1(r)$, $g_2(r)$ unterhalten werden (die g sind Funktionszeichen), so dass also noch die Bedingungen erfüllt werden müssen

$$Z_{r=R} = g(\varphi);\ Z_{\varphi=o} = g_1(r);\ Z_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = g_2(r). \quad \ldots \quad (3)$$

Unsere physikalische Aufgabe ist mithin auf folgende mathematische zurückgeführt: Es soll eine Funktion Z von t, r und φ gefunden werden, welche der Differentialgleichung (1) genügt und die vier Bedingungen (2) und (3) erfüllt.

Behufs Lösung dieser Aufgabe zerlegen wir die Funktion Z in die Summe von 3 Funktionen (Wärmezustände), setzen nämlich

$$Z = S + U + V$$

uud verteilen die oben aufgestellten 4 Bedingungen so, wie es nachstehende Uebersicht zeigt. Der Abkürzung halber schreiben wir

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi} \equiv \triangle^2 Z$$

und Analoges für andere Buchstaben.

(A) . .

S	U	V
$\frac{\partial S}{\partial t} = \Delta^2 S,$	$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta^2 U,$	$\frac{\partial V}{\partial t} = \Delta^2 V,$
$S_{t=0} = f(r,\varphi),$	$U_{t=0} = 0,$	$V_{t=0} = 0,$
$S_{r=R} = 0,$	$U_{r=R} = g(\varphi),$	$V_{r=R} = 0,$
$S_{\varphi=0} = 0,$	$U_{\varphi=0} = 0,$	$V_{\varphi=0} = g_1(r),$
$S_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = 0,$	$U_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = 0,$	$V_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = g_2(r).$

Jede der Funktionen U und V zerlegen wir von neuem in zwei Funktionen. U teile sich in $u + \mathfrak{u}$, von denen u von t unabhängig sei, sodass demnach $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}$ ist. Folgende Uebersicht giebt die auf u und $\mathfrak{u}$ verteilten Bedingungen:

für u: $o = \Delta^2 u$, ————, $u_{r=R} = g(\varphi)$, $u_{\varphi=0} = o$, $u_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = o$,

für $\mathfrak{u}$: $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = \Delta^2 \mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}_{t=0} = -u$, $\mathfrak{u}_{r=R} = o$, $\mathfrak{u}_{\varphi=0} = o$, $\mathfrak{u}_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = o$.

Die Funktion u stellt einen Finalzustand dar, während $\mathfrak{u}$ denselben Charakter hat, wie die Funktion S.

V zerlegen wir in folgender Weise:

$$V = v + \mathfrak{v},$$

wo v von t unabhängig sein soll. Die Verteilung der Bedingungen sei diese:

für v: $o = \Delta^2 v$, ————, $v_{v=R} = o$, $v_{\varphi=0} = g_1(r)$, $v_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = g_2(r)$

für $\mathfrak{v}$: $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \Delta^2 \mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_{t=0} = -v$, $\mathfrak{v}_{r=R} = v$, $\mathfrak{v}_{\varphi=0} = o$, $v_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = o$.

Es ist jetzt leicht ersichtlich, wie die Summe aller vorstehender Teilfunktionen lediglich denselben Bedingungen genügen, wie Z. Unsere ursprüngliche Aufgabe für Z ist somit zurückgeführt auf die Ermittelung der 5 Wärmezustände S, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, u, v für unseren Cylinderausschnitt, von denen S, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ denselben Charakter besitzen, Wir beginnen mit der Lösung der beiden letzten.

2. Ermittelung des Finalzustandes u.

Der Uebersichtlichkeit halber stellen wir die Bedingungen, denen u zu genügen hat, zusammen; sie sind

(4) . .
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = o,$$

$$u_{r=R} = g(\varphi);\ u_{\varphi=0} = 0;\ u_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = 0. \quad \ldots \quad (5)$$

Es soll also der stationäre Endzustand berechnet werden, den der Cylinderausschnitt annimmt, wenn seine Mantelfläche beständig auf der Temperatur $g(\varphi)$ und seine beiden ebenen Begrenzungsflächen auf Null erhalten werden. Der Differentialgleichung (4) wird genügt durch eine Summe von Gliedern von der Form

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} r^m \ (A \sin m\varphi + B \cos m\varphi) \quad \ldots \quad (6)$$

wo A und B später noch zu bestimmende Constanten bedeuten. Andere partikuläre Lösungen, welche den Faktor r^{-m} bei sich haben, können hier keine Verwendung finden, da wir den vollen Cylinder (also auch den Punkt $r = o$) betrachten, für den die Funktion unendlich werden würde. Damit den beiden letzten Bedingungen (5) genügt werde, verfahren wir gemäss der im I. Abschnitte gegebenen Bemerkungen also: Wir führen unsere Aufgabe folgendermassen auf eine für den ganzen Cylinder zurück, indem wir unserem Körper noch $2n-1$ ebensolcher, ihm kongruenter Cylinderteile in geeigneter Weise anfügen, ihn also zu einem vollen Cylinder ergänzen. Es sei mit a der Mittelpunkt eines beliebigen Querschnitts unseres so zusammengesetzten Cylinders bezeichnet: es seien ferner ab, ac, ad und ae vier aufeinander folgende Radien dieses Querschnitts, entsprechend den Begrenzungsebenen dreier benachbarter Cylinderausschnitte, sodass also abc, acd, ade drei nebeneinanderliegende Kreisausschnitte bezeichnen. In dem Kreisausschnitt abc sei die ursprünglich gegebene Temperaturverteilung vorhanden; alsdann bringen wir in dem Kreisausschnitt acd Temperaturen an, die zu denen innerhalb abc inbezug auf den Radius ac invers symmetrisch liegen; dann wird längs ac die Temperatur Null herrschen. Innerhalb adf belegen wir die einzelnen Punkte mit Temperaturen, die andererseits zu denen in acd invers symmetrisch liegen, also dass auch längs des Radius ad die Temperatur Null herrschen wird. Die Temperaturen auf der Mantelfläche verteilen wir ebenfalls in derselben Weise, so dass also in einem Punkte $bc + \varepsilon$ dieselbe Temperatur herrscht, wie in dem Punkte $bc-\varepsilon$, jedoch mit entgegengesetzten Zeichen genommen. Unter der Bestimmung, dass n eine ganze Zahl sei, wird sich der Kranz in ordnungsmässiger Weise schliessen. Unstetigkeiten in der Wärmeverteilung können nicht vorkommen, da wir einen Finalzustand vor uns haben. Die Funktion u hat mithin noch folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} u(\varphi) = u\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) = u\left(\varphi + \frac{4\pi}{n}\right) = \ldots = u\ (\varphi + 2\pi), \text{ ferner} \\ = -u\ (2\pi-\varphi) = -u\left(\frac{2(n-1)\pi}{n} - \varphi\right) = \ldots = -u\ (-\varphi). \end{aligned} \quad \ldots \quad (7)$$

Lassen wir unter diesen Bedingungen den vollen Cylinder erkalten, so wird der Wärmefluss in den einzelnen Ausschnitten ebenfalls nach den ihnen vorgeschriebenen Bedingungen

verlaufen. Mit der Berechnung des Finalzustandes des ganzen, in angegebener Weise konstruirten Cylinders haben wir alsdann auch denjenigen unseres Cylinderausschnitts gefunden.

Den Bedingungen (7) genügt nur die erste Hälfte der Summe (6) und auch nur dann, wenn wir mn statt m setzen. Wir schreiben daher als Lösung

8) . . $$u = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{r^{mn}}{R^{mn}} A \sin mn\varphi,$$

wo m und n ganze Zahlen sind, und die willkürlich hinzugefügte Constante $\frac{1}{R^{mn}}$ keine Störung verursacht. (8) genügt jetzt den beiden letzten Bedingungen (5). Damit auch der ersten Bedingung (5) genügt werde, muss die Gleichung

$$g(\varphi) = \sum_{m} A_m \sin mn\varphi$$

erfüllt werden. Aus dieser ergeben sich die Werte der Constanten A, nämlich

$$A_m = \frac{2n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} g(\varphi) \sin mn\varphi \, d\varphi, \text{ wo } o < \varphi < \frac{\pi}{n}.$$

Als Lösung unserer Aufgabe erhalten wir schliesslich

(9) . . $$u = \frac{2n}{\pi} \sum_{m} \left(\frac{r}{R}\right)^{mn} \sin mn\varphi \int_0^{\frac{\pi}{n}} g(\varphi) \sin mn\varphi \, d\varphi.$$

3. Ermittelung des Finalzustandes v.

Für v haben wir an den Grenzflächen die Bedingungen

$$v_{r=R} = o; \; v_{\varphi=0} = g_1(r); \; v_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = g_2(r),$$

d. h., es soll der Finalzustand des Cylinderausschnitts berechnet werden, wenn dessen krumme Begrenzungsfläche auf der Temperatur Null, und dessen beide ebenen Begrenzungsflächen, nämlich $\varphi = o$ auf der Temperatur $g_1(r)$ und $\varphi = \frac{\pi}{n}$ auf $g_2(r)$ erhalten werden sollen.

Die auch für v gültige Differentialgleichung (4) wollen wir in folgender Form schreiben:

(10) . . $$\frac{\partial^2 v}{\partial \left(\log \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = o$$

Anstelle von r führen wir nun die Coordinate ϑ ein, indem wir setzen

(11) . . $$\log \frac{R}{r} = \vartheta.$$

Erstrecken sich die Werte r von o bis R, so sind diejenigen von ϑ zwischen ∞ und o zu nehmen. Durch die aus (11) folgende Transformationsformel $r = Re^{-\vartheta}$ verwandeln wir die Funktionen $g_1(r)$ und $g_2(r)$ in $g_1(\vartheta)$ und $g_2(\vartheta)$; dann lauten die Grenzbedingungen folgendermassen:

$$v_{\vartheta = o} = o;\ v_{\varphi = o} = g_1(\vartheta);\ v_{\varphi = \frac{\pi}{n}} = g_2(\vartheta) \quad . \quad . \quad (12)$$

Der Differentialgleichung (10) wird genügt durch Ausdrücke von der Form

$$\sin \alpha\vartheta \left(Ae^{\alpha\varphi} + Be^{-\alpha\varphi}\right) + \cos \alpha\vartheta \left(Ce^{\alpha\varphi} + De^{-\alpha\varphi}\right)$$

wo α eine beliebige Zahl und A, B, C, D noch zu bestimmende Constanten bedeuten. Zunächst zeigt sich, dass wegen der ersten Bedingung (12) C und D gleich Null gesetzt werden müssen. Den übrig bleibenden Ausdruck multipliciren wir mit $d\alpha$ und integriren ihn inbezug auf α von o bis ∞; dies sei unsere Lösung, also

$$v = \int_0^\infty \sin \alpha\vartheta \left(Ae^{\alpha\varphi} + Be^{-\alpha\varphi}\right) d\alpha. \quad . \quad . \quad (13)$$

Nun müssen die Constanten A und B bestimmt werden. Dieselben werden sich als gewisse Funktionen von α darstellen, und von ihren Werten wird es abhängen, ob den beiden Teilintegralen in unserer Lösung ein Wert zukomme oder nicht. Hat das eine oder das andere keinen Sinn, so muss es als unbrauchbar verworfen werden. Die Bestimmung von A und B geschieht in folgender Weise.

Die Sin.-Form des Fourier'schen Doppelintegrals, das unsere erste Bedingung (12) erfüllt, ist bekanntlich

$$g(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha\vartheta \, d\alpha \int_0^\infty g(\lambda) \sin \alpha\lambda \, d\lambda$$

Soll nun unsere Lösung (13) für $\varphi = o$ in $g_1(\vartheta)$ übergehen, so muss

$$A + B = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g_1(\lambda) \sin \alpha\lambda \, d\lambda \quad . \quad . \quad (14)$$

gesetzt werden; und ebenso ersieht man, dass für $\varphi = \frac{\pi}{n}$ gesetzt werden muss

$$Ae^{\alpha\frac{\pi}{n}} + Be^{-\alpha\frac{\pi}{n}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g_1(\lambda) \sin \alpha\lambda \, d\lambda \quad . \quad . \quad (15)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen sind alsdann A und B zu bestimmen.

5. Ermittelung des von der Zeit abhängigen Temperaturzustandes S.

Bedingungen:

$$(16) \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2}$$

$$(17) \quad S_{t=0} = f(r, \varphi); \; S_{r=R} = 0; \; S_{\varphi=0} = 0; \; S_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = 0.$$

Es soll eine Funktion S von t, r und φ gefunden werden, die einen Wärmezustand darstellt, den der Cylinderausschnitt nach einer gewissen Zeit angenommen hat, wenn er vorher eine gegebene Anfangserwärmung $f(r, \varphi)$ hatte, und wenn seine drei Begrenzungsflächen während der Abkühlung auf der Temperatur 0 erhalten werden. Der Verlauf der Wärmeströmung wird in diesem Cylinderausschnitt derselbe bleiben, wenn wir letzteren vermittelst $2n-1$ ihm kongruenter Körper zu einem vollständigen Cylinder ergänzen und in demselben die Anfangstemperatur in der Weise festsetzen, wie wir es bei der Berechnung des Finalzustandes u gethan haben. Jedoch erhalten wir im jetzigen Falle den ganzen Cylindermantel auf der Temperatur 0. Hieraus folgen für die Punkte des Cylinders noch die Bedingungen, wie wir sie in (7) aufgestellt haben.

Um eine Lösung der Differentialgleichung (16) zu finden, setzt man

$$S = e^{-\lambda^2 t} F(r, \varphi).$$

Dem t haben wir den für jeden reellen Wert von λ negativen Faktor $-\lambda^2$ hinzugefügt, damit der Wärmezustand S nach unendlich langer Zeit nicht unendlich gross werde, was ungereimt sein würde. F muss jetzt der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 F = 0$$

genügen.

Wir setzen ferner

$$F = \rho (A \sin m\varphi + B \cos m\varphi),$$

wo m alle ganzen Zahlen durchlaufen kann, A und B noch zu bestimmende Constanten sind und ρ nur Funktion von r ist; dasselbe muss die Gleichung erfüllen

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\rho = 0.$$

Diese Gleichung besitzt zwei Integrale, von denen das eine für $r = o$ unendlich wird; dieses müssen wir von unserer Betrachtung ausschliessen. Die andere Lösung findet man, wenn man versucht, der Gleichung durch eine Reihe zu genügen, die nach Potenzen von r fortschreitet. Die erst willkürlich angenommenen Coefficienten und Exponenten bestimmt man dann nachträglich.

Die Gleichung (18) schreiben wir, nachdem darin $\lambda r = x$ gesetzt wurde, so:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{m^2}{x^2}\rho = -\rho. \quad \ldots \quad (19)$$

Es sei allgemein

$$\rho = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots$$

Hieraus bilde man die Glieder der Gleichung (19) und substituire in der Gleichung selbst die dafür erhaltenen Reihen, dann wird man erhalten:

$$A(\alpha^2 - m^2)x^{\alpha-2} + B(\beta^2 - m^2)x^{\beta-2} + C(\gamma^2 - m^2)x^{\gamma-2} + \ldots$$
$$= -Ax^\alpha - Bx^\beta - Cx^\gamma - \ldots$$

Um auf beiden Seiten in gleicher Weise fortschreitende Potenzen von x zu erhalten, legen wir den Coeffizienten folgende Werte bei:

$$\alpha = m,$$
$$\beta = m + 2,$$
$$\gamma = m + 4,$$
$$\ldots\ldots$$

infolge dessen geht diese Gleichung über in

$$4B(m+1)x^m + 8C(m+2)x^{m+2} + 12D(m+3)x^{m+4} + \ldots$$
$$= -Ax^m - Bx^{m+2} - Cx^{m+4} - \ldots$$

Die Uebereinstimmung der Coeffizienten dieser beiden Reihen wird durch folgende Beziehungen erreicht

$$4B(m+1) = -A,$$
$$8C(m+2) = -B,$$
$$12D(m+3) = -C,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

oder, wenn alle Coeffizienten durch A ausgedrückt werden,

$$B = \frac{-A}{4(m+1)},$$

$$C = \frac{A}{4.8(m+1)(m+2)}$$

$$D = \frac{-A}{4.8.12(m+1)(m+2)(m+3)},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Die so für die Exponenten und Coeffizienten gewonnenen Werte setzen wir in die allgemeine Reihe für ρ ein und erhalten, wenn wir $\frac{A}{2^m \Gamma(m+1)}$ anstatt A schreiben, wodurch ρ immer noch Lösung von (18) bleibt,

$$\rho = \frac{A\, x^m}{2^m\, \Gamma\,(m+1)} \left(1 - \frac{x^2}{2\,(2m+2)} + \frac{x^4}{2.4\,(2m+2)\,(2m+4)} - \ldots \right)$$

Die vorstehende Reihe, abgesehen von dem konstanten Faktor A, ist die Reihe für die $m$te Cylinderfunktion (Bessel'sche Funktion) mit dem Argument x, die mit $J_m\,(x)$ bezeichnet werden möge. Die Verbindung der für ρ, F und S aufgestellten Werte liefert jetzt als Lösung der Differentialgleichung (16):

$$e^{-\lambda^2 t} \sum_m J_m\,(\lambda r)\,[A \sin m\varphi + B \cos m\varphi].$$

Weil die Bedingungen (7) auch hier gelten, so müssen wir der Constanten B den Wert 0 erteilen, womit auch zugleich der Bedingung $S_{\varphi=0} = 0$ genügt wird. Wegen $S_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = 0$ setzen wir mn anstelle von m, und damit auch $S_{r=R} = 0$ werde, wählen wir für die noch zu bestimmende Grösse λ solche Werte, welche Wurzeln der Gleichung $J_{mn}\,(\lambda R) = 0$ sind. Diese Wurzelwerte seien mit λ_1, λ_2 . . . allgemein λ_χ bezeichnet.

Als endgültige Lösung des Wärmezustandes S werden wir nun ansehen können

(20) . .
$$S = \sum_\chi A e^{-\lambda_\chi^2 t} \sum_m J_{mn}\,(\lambda_\chi\, r).\ \sin mn\varphi.$$

Endlich müssen die Constanten A noch so bestimmt werden, dass die Bedingung $S_{t=0} = f\,(r, \varphi)$ erfüllt werde.

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . . . die Wurzeln der Gleichung $J_n\,(\lambda R) = 0$,

μ_1, μ_2, μ_3 . . . „ „ „ „ $J_{2n}\,(\lambda R) = 0$,

ν_1, ν_2, ν_3 . . . „ „ „ „ $J_{3n}\,(\lambda R) = 0$,

u. s. w.,

dann stellt sich die Doppelsumme in (20) in ausführlicher Weise so dar:

$$\begin{aligned} S = {} & \left[A_1 e^{-\lambda_1^2 t} J_n\,(\lambda_1 r) + A_2 e^{-\lambda_2^2 t} J_n\,(\lambda_2 r) + \ldots \right] \sin n\varphi \\ & + \left[B_1 e^{-\mu_1^2 t} J_{2n}\,(\mu_1 r) + B_2 e^{-\mu_2^2 t} J_{2n}\,(\mu_2 r) + \ldots \right] \sin 2n\varphi \\ & + \left[C_1 e^{-\nu_1^2 t} J_{3n}\,(\nu_1 r) + C_2 e^{-\nu_2^2 t} J_{3n}\,(\nu_3 r) + \ldots \right] \sin 3n\varphi \\ & + \ldots \end{aligned} \qquad (21)$$

Die Bedeutung der Constanten ist leicht zu erkennen.

Wir entwickeln nun andererseits $f\,(r, \varphi)$ nach den sin der Vielfachen von $n\varphi$, setzen also

(22) . .
$$f\,(r, \varphi) = \Re_1 \sin n\varphi + \Re_2 \sin 2n\varphi + \ldots,$$

wo die $\Re$ bekannte Funktionen von r sind. Da für $t = 0$ S in $f\,(r, \varphi)$ übergehen soll, so müssen die rechten Seiten von (21) und (22) in diesem Falle einander gleich werden. Das ergiebt folgende Relationen:

$$A_1 J_n(\lambda_1 r) + A_2 J_n(\lambda_2 r) + \ldots = \mathfrak{R}_1,$$
$$B_1 J_{2n}(\mu_1 r) + B_2 J_{2n}(\mu_2 r) + \ldots = \mathfrak{R}_2,$$

u. s. w.

In diesem System von Gleichungen sind nun die Coeffizienten A, B, ... zu bestimmen. Die allgemeine Gleichung desselben sei

$$\mathfrak{L}_1 J_{mn}(\sigma_1 r) + \mathfrak{L}_2 J_{mn}(\sigma_2 r) + \ldots + \mathfrak{L}_i J_{mn}(\sigma_i r) + \ldots = \mathfrak{R}_m \quad \ldots \quad (23)$$

Wir multipliziren vorstehende Gleichung mit $r J_{mn}(\sigma_h r)$ und integriren gliedweise von 0 bis R. Da nun

$$\int_0^R J_{mn}(\sigma_i r) J_{mn}(\sigma_h r) r dr = \begin{cases} 0 \text{ für } h \lesseqgtr i \\ \frac{R^2}{2}\left[J'_{mn}(\sigma_i R)\right]^2 \text{ für } h = i \end{cases} \quad \ldots \quad (24)$$

ist, so verschwinden alle Integrale der linken Seite ausser demjenigen, welches mit $\mathfrak{L}_i$ multiplizirt ist, sodass wir als Wert von $\mathfrak{L}_i$ erhalten:

$$\mathfrak{L}_i = \frac{2}{R^2\left[J'_{mn}(\sigma_i R)\right]^2} \int_0^R \mathfrak{R}_m J_{mn}(\sigma_i r) r dr.$$

$J'(\sigma R)$ ist zur Abkürzung für $\left[\frac{\partial J(\sigma r)}{\partial r}\right]_{r=R}$ gesetzt.

Die Formeln (24) erhält man bald, wenn man die Gleichung (18), welche durch $J_{mn}(\sigma_i r)$ identisch erfüllt wird, mit $r J_{mn}(\sigma_h r)$ multiplizirt, zwischen den Grenzen 0 und R integrirt und dann das erste Glied zweimal partiell integrirt. Aus der so resultirenden Gleichung ergibt sich sofort eine zweite durch Vertauschung der Wurzelwerte σ_i und σ_h. Die Vergleichung der so erhaltenen beiden Gleichungen liefert die Formeln (24).

Somit sind alle Bedingungen (17) erfüllt und deshalb (20) die Lösung für S.

Es könnte zweifelhaft erscheinen, ob eine Entwickelung nach $m$ten Cylinderfunktionen, wie wir sie in (23) vor uns haben, deren Argumente die Wurzeln einer Gleichung sind, möglich sei. Dass dies der Fall ist, lässt sich zeigen mit Hülfe einer Beweisführung, die Sturm und Liouville[1]) bei Summirung trigonometrischer Reihen gegeben haben.

Die Summe der linken Seite von (23) nach Einsetzung der Werte der Constanten werde vorläufig mit $\mathfrak{S}_m$ bezeichnet, also

$$2\sum_i \frac{J_m(\sigma_i r)}{R^2\left[J'_m(\sigma_i R)\right]^2} \int_0^R \mathfrak{R}_m J_m(\sigma_i r) r dr = \mathfrak{S}_m \quad \ldots \quad (25)$$

(n ist der bequemeren Schreibweise wegen $= 1$ gesetzt). Bei dem vorhin angegebenen Ver-

[1]) Liouville, Journ. d. mathém. I. Série, 2. Tome pg. 220.

fahren zur Erlangung der Integralwerte (24) kommt man, wenn σ eine willkürliche Grösse, der wir beliebige reelle Werte beilegen können, und σ_i eine Wurzel der Gleichung $J_m(\sigma R) = 0$ ist, zu folgender Gleichung

$$\int_0^R J_m(\sigma r)\, J_m(\sigma_i r)\, r dr = \frac{R\sigma_i\, J_m(\sigma R)\, J_m'(\sigma_i r)}{\sigma^2 - \sigma_i^2},$$

die durch Division mit $\frac{R^2 [J_m'(\sigma_i R)]^2}{2 J_m(\sigma_i r)}$ folgende Gestalt annimmt

$$\frac{2 J_m(\sigma_i r) \int_0^R J_m(\sigma r)\, J_m(\sigma_i r)\, r dr}{R^2 [J_m'(\sigma_i R)]^2} = \frac{2\sigma_i\, J_m(\sigma R)\, J_m(\sigma_i r)}{(\sigma^2 - \sigma_i^2)\, R\, J_m'(\sigma_i R)}.$$

Fassen wir jetzt $J_m(\sigma r)$ als eine Funktion von σ^2 auf, die uns indess nur gegeben ist für die Werte $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots \sigma_i^2, \ldots$ des Argumentes σ^2, so können wir sie nach der Lagrange'schen Interpolationsformel so schreiben

$$J_m(\sigma r) = \sum_i J_m(\sigma R) \frac{J_m(\sigma_i r).\, 2\sigma_i}{(\sigma^2 - \sigma_i^2)\, R\, J_m'(\sigma_i R)}.$$

Bei Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem vorhergehenden erhalten wir

$$J_m(\sigma r) = 2 \sum_i \frac{J_m(\sigma_i r)}{R^2 [J_m'(\sigma_i R)]^2} \int_0^R J_m(\sigma r)\, J_m(\sigma_i r)\, r dr.$$

Diese Gleichung geht nach Multiplikation mit der Funktion $\Re_m\, r dr$ und Integration zwischen 0 und R über in

$$\int_0^R \Re_m\, J_m(\sigma r)\, r dr = 2 \sum_i \frac{\int_0^R \Re_m\, J_m(\sigma_i r)\, r dr}{R^2 [J_m'(\sigma_i R)]^2} \int_0^R J_m(\sigma r)\, J_m(\sigma_i r)\, r dr$$

Nun multipliziren wir (25) mit $J_m(\sigma r)\, r dr$ und integriren ebenfalls von 0 bis R; wir erhalten dann

$$\int_0^R \Im_m\, J_m(\sigma r)\, r dr = 2 \sum_i \frac{\int_0^R \Re_m\, J_m(\sigma_i r)\, r dr}{R^2 [J_m'(\sigma_i r)]} \int_0^R J_m(\sigma r)\, J_m(\sigma_i r)\, r dr.$$

Aus der Gleichheit der rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen schliessen wir auf die Gleichheit der linken, also dass bestehe

$$(26) \qquad \int_0^R (\Re_m - \Im_m)\, J_m(\sigma r)\, r dr = 0.$$

welche Gleichung für jeden Wert von σ erfüllt werden muss. Würde in vorstehendem Integral $\mathfrak{R}_m - \mathfrak{S}_m$ innerhalb des Intervalls von 0 bis R immer dasselbe Zeichen behalten, so brauchen wir nur, da σ ganz willkürlich ist, dem σ einen solchen Wert zu geben, das $J_m(\sigma r)r$ auch dieses Zeichen innerhalb des genannten Intervalles annimmt, alsdann wird das Integral nicht Null ergeben. Soll die Gleichung (26) bestehen, so darf zunächst $\mathfrak{R}_m - \mathfrak{S}_m$ innerhalb 0 und R nicht immer dasselbe Zeichen beibehalten. Wechselt $\mathfrak{R}_m - \mathfrak{S}_m$ das Zeichen, so können wir dem σ solche Werte erteilen, die bewirken, dass $J_m(\sigma r)r$ mit $\mathfrak{R}_m - \mathfrak{S}_m$ zugleich das Zeichen wechselt, und in diesem Falle würde das Integral (26) ebenfalls nicht $= 0$ werden, mithin darf $\mathfrak{R}_m - \mathfrak{S}_m$ sein Zeichen inuerhalb 0 bis R nicht wechseln, wenn (26) für alle Werte von σ gelten soll. Es kann daher (26) nicht anders erfüllt werden, als wenn $\mathfrak{R}_m - \mathfrak{S}_m = 0$ ist, womit die Möglichkeit unserer Entwickelung dargethan ist.

6. Die Aufgaben für u und v. — Schlussresultat.

Es ist jetzt unnötig die Lösungen für u und v abzuleiten; aus der auf Seite 4 entworfenen Uebersicht (A) über die Verteilung der Bedingungen ist ersichtlich, dass ihre Bedingungen mit denen von S übereinstimmen. Der einzige Unterschied liegt darin, dass wir jetzt $-u$, $-v$ anstelle von $f(r, \varphi)$ nach den sin. der Vielfachen von $n\varphi$ zu entwickeln haben.

Schlussresultat. Da nun alle 5 Wärmezustände, u, v, S, u, v erledigt sind, und ihre Summe den ursprünglich geforderten Wärmezustand Z (Seite 3) ergiebt, so ist damit die Aufgabe gelöst.

7. Anwendung des Vorhergehenden.

I. Aufgabe. „Es soll der von den Coordinaten r und φ abhängige Finalzustand eines Cylinderausschnitts berechnet werden, der durch n durch die Achse eines Kreiscylinders gelegte Schnitte, die immer dieselbe Neigung zu einander haben, entstanden ist. Seine krumme Oberfläche soll fortwährend auf der konstanten Temperatur 1 und seine ebenen Begrenzungsflächen auf einer Temperatur erhalten werden, die wie die $p$te Potenz $(p > o)$ der senkrechten Entfernung von der Cylinderachse zunimmt".

Bezeichnet Z den zu berechnenden Finalzustand, so ist derselbe nach Vorhergehendem an folgende Bedingungen geknüpft:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} = 0,$$

$$Z_{r=1} = 1;\ Z_{\varphi=0} = r^p;\ Z_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = r^p,$$

wo der bequemeren Schreibweise halber der Radius R des Cylinders $= 1$ angenommen ist. Diese Aufgabe zerlegen wir in zwei Aufgaben, setzen nämlich

$$Z = u + v$$

und verteilen die Bedingungen, wie folgt

$$u_{r=1} = 1;\ u_{\varphi=0} = 0;\ v_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = 0;$$

$$v_{r=1} = 0;\ v_{\varphi=0} = r^p;\ v_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = r^p.$$

Die Funktion u.

Die Funktion u bildet einen speziellen Fall der Funktion u auf Seite 6; wir brauchen dort nur $g(\varphi) = 1$ zu setzen. Wir erhalten dann als Lösung:

$$u = \frac{2n}{\pi} \sum_{m=0}^{m=\infty} r^{mn} \sin mn\varphi \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{n}} \sin mn\varphi \, d\varphi,$$

das ist aber

$$= \frac{2}{\pi} \left(\sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^{m+1} r^{mn} \frac{\sin mn\varphi}{m} + \sum_{m=0}^{m=\infty} r^{mn} \frac{\sin mn\varphi}{m} \right)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{m=\infty} r^{(2m+1)n} \frac{\sin (2m+1)\varphi}{2m+1}.$$

Vorstehende unendliche Reihe wollen wir noch in geschlossener Form darstellen. Wir schreiben sie in folgender Weise

(27) . . $$\frac{4n}{\pi} \int_0^{\varphi} d\varphi \sum_{m=0}^{m=\infty} r^{(2m+1)n} \cos (2m+1) n\varphi.$$

und benutzen die übliche Summationsmethode, die darin besteht, dass man einen imaginären Sin.-Teil hinzufügt und ihn später wieder absondert. Wir betrachten also statt (27) den folgenden Ausdruck

$$\frac{4n}{\pi} \int_0^{\varphi} d\varphi \sum_{m=0}^{m=\infty} r^{(2m+1)n} e^{-(2m+1)ni\varphi}.$$

Unter dem Integralzeichen haben wir eine geometrische Reihe, die wir summiren (man beachte, dass $r < 1$ ist) und erhalten

(28) . . $$\frac{4n}{\pi} \int d\varphi \frac{r^n e^{-ni\varphi}}{1 - r^{2n} e^{-2ni\varphi}}.$$

Der Abkürzung halber setzen wir für den Augenblick

$$e^{-ni\varphi} = x \text{ und } r^n = a;$$

dadurch nimmt das unbestimmte Integral (28) folgende Form an

$$\frac{4}{\pi i a} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{a^2}},$$

oder, wenn wir in Partialbrüche zerlegen und die Integration ausführen:

$$-\frac{2}{\pi i}\log\frac{x+\frac{1}{a}}{x-\frac{1}{a}}$$

oder, für x seinen Wert zurückgesetzt,

$$-\frac{2}{\pi i}\log\frac{e^{-ni\varphi}+\frac{1}{a}}{e^{-ni\varphi}-\frac{1}{a}}. \qquad (29)$$

Von diesem Ausdruck bildet der reelle Teil den Wert unseres u. Um denselben zu finden, setzen wir (29) $= u + iy$, dann wird

$$\log\frac{\cos n\varphi+\frac{1}{a}-i\sin n\varphi}{\cos n\varphi-\frac{1}{a}-i\sin n\varphi}=-\frac{\pi i}{2}u+\frac{\pi}{2}y,$$

woraus folgt, wenn der Nenner reell gemacht wird,

$$\frac{1-\frac{1}{a^2}+i\frac{2}{a}\sin n\varphi}{1+\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos n\varphi}=e^{-\frac{\pi i}{2}u+\frac{\pi}{2}y}$$

und hieraus wiederum

$$u=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2a\sin n\varphi}{1-a^2},$$

und, wenn für a der eigentliche Wert eingesetzt wird,

$$u=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2r^n\sin n\varphi}{1-r^{2n}}.$$

Eigentlich wären hier noch die Grenzen φ und o einzusetzen; da wir aber den arctg. zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ nehmen, und der Ausdruck für die untere Grenze verschwindet, so gilt er, wie er eben vermerkt ist. Da r ein pos., echter Bruch ist, so nähert sich $1-r^{2n}$ mit wachsendem r von der positiven Seite her in stetiger Weise der 0; es wird also die tg für $r = 1$ positiv unendlich, also $u_{r=1} = 1$, wie es sein soll. Desgleichen nähert sich mit abnehmendem sin, d. h. wenn φ sich 0 oder $\frac{\pi}{n}$ nähert, u der Null. Nur für die Eckpunkte des Kreisausschnitts entsteht eine Unbestimmtheit, die unser Resultat aber keineswegs beeinträchtigt, denn wir können dieselben in beliebig enge Grenzen einschliessen, und bis zu diesen leistet unser Resultat den gegebenen Bedingungen genüge.

Die Funktion v.

Dieser Zustand bildet einen speziellen Fall der Funktion v auf S. 7; wir brauchen dort in den Gleichungen (14) und (15) nur $g_1(\vartheta) = g_2(\vartheta) = e^{-p\vartheta}$ zu setzen. Zur Bestimmung der Constanten A und B dienen alsdann die beiden Gleichungen

$$A + B = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-p\lambda} \sin \alpha\lambda \, d\lambda = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$$

und

$$Ae^{\alpha\varphi_0} + Be^{-\alpha\varphi_0} = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2},$$

wo $\frac{\pi}{n} = \varphi_0$ gesetzt ist.

Eine einfache Rechnung ergiebt hieraus

$$A = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \frac{e^{-\alpha\varphi_0}}{1 + e^{-\alpha\varphi_0}},$$

$$B = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \frac{1}{1 + e^{-\alpha\varphi_0}},$$

sodass, wenn wir $\frac{1}{1 + e^{-\alpha\varphi_0}}$ in eine Reihe entwickeln und dieselbe in vorstehende Ausdrücke einsetzen, wir als Lösung erhalten

$$v = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha\vartheta}{p^2 + \alpha^2} \left[\sum_m (-1)^m e^{-(m+1)\varphi_0 - \varphi)\alpha} + \sum_m (-1)^m e^{-(m\varphi_0 + \varphi)\alpha} \right] d\alpha$$

Die vorstehende Lösung besteht aus Integralen von der Form

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\alpha} \alpha \sin \alpha\vartheta}{p^2 + \alpha^2} d\alpha.$$

Wir wollen noch nachweisen, dass denselben ein endlicher Wert zukommt. Dieses Integral wird nach bekannten Regeln einen bestimmten Wert ausdrücken, sobald sein Wert, zwischen den Grenzen g und $g + h$ genommen, mit unendlich wachsendem g für ein beliebiges endliches h unendlich klein wird.

Um dies zu zeigen, benützen wir folgenden Satz:

„Wenn in dem Integral $\int_a^b \varphi(x) f(x) \, dx$

die Funktion $f(x)$ innerhalb der Grenzen von a bis b sein Zeichen nicht wechselt, und man mit $M[\varphi(x)]$ einen gewissen Mittelwert von $\varphi(x)$ bezeichnet, der zwischen dem Maximal- und Minimalwerte dieser Funktion liegt, so ist

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) = M\,[\varphi(x)] \int_a^b f(x)\,dx.\text{“ }^{1})$$

Nach diesem Satze können wir setzen

$$\int_g^{g+h} \frac{e^{-a\alpha}\,\alpha\,\sin\,\alpha\vartheta}{p^2+\alpha^2}\,d\alpha = M\,[e^{-a\alpha}\sin\alpha\vartheta] \int_g^{g+h} \frac{\alpha\,d\alpha}{p^2+a^2} \quad \ldots \quad (30)$$

Nun ist

$$\int_g^{g+h} \frac{\alpha\,d\alpha}{p^2+\alpha^2} = \frac{1}{2}\log\frac{p^2+g^2+h^2+2gh}{p^2+g^2} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h^2}{p^2+g^2}+\frac{2gh}{p^2+g^2}\right).$$

Dieser letzte Wert verschwindet mit unendlich wachsendem g, und da $M\,[e^{-a\alpha}\sin\alpha\vartheta]$ zwischen 0 und 1 ist, so geht (30) mit unendlich wachsendem g unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit herab, und es ist somit nachgewiesen, dass den Integralen in v ein Wert zukommt. Der Wert v genügt den vorgeschriebenen Bedingungen, denn er wird Null für $\vartheta = 0$, und sowohl für $\varphi = 0$, als auch für $\varphi = \varphi_0$ erhält man

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\alpha\,\sin\,\alpha\vartheta}{p^2+\alpha^2}\,d\alpha,$$

was für $\vartheta > 0$ und $p > 0$ gleich $e^{-p\vartheta}$ ist.

II. Aufgabe: „Es soll der von r und φ abhängige Finalzustand Z des erwähnten Cylinderausschnitts berechnet werden, wenn dessen ebene Begrenzungsfläche $\varphi = 0$ auf der Temperatur Null und dessen andere ebene Begrenzungsfläche $\varphi = \frac{\pi}{n} = \varphi_0$, ebenso die krumme Fläche auf der Temperatur 1 erhalten werden“.

Unser Z ist eine Lösung der in der I. Aufgabe aufgestellten Differentialgleichung und muss folgenden Bedingungen genügen:

$$Z_{r=1} = 1;\ Z_{\varphi=0} = 0;\ Z_{\varphi=\varphi_0} = 1.$$

Wir zerlegen diese Aufgabe in zwei, setzen nämlich $Z = u + v$ und verteilen die Bedingungen, wie folgt:

$$u_{r=1} = 1;\ u_{\varphi=0} = 0;\ u_{\varphi=\varphi_0} = 0;$$
$$v_{r=1} = 0;\ v_{\varphi=0} = 0;\ v_{\varphi=\varphi_0} = 1.$$

Die Funktion u ist identisch mit der Funktion u in der I. Aufgabe.

Die Funktion v bildet einen Spezialfall von (13); die Constanten A und B sind für unsere jetzige Aufgabe so zu bestimmen, dass in der Gleichung (14) $g_1(\lambda) = 0$ und in (15) $g_2(\lambda) = 1$ zu setzen ist. Dies ergiebt

[1]) Vergl. Riemann, part. Differentialgl., herausgeg. v. Hattendorff, 1876, S. 15.

$$A + B = 0 \text{ und } Ae^{\alpha\varphi_0} + Be^{-\alpha\varphi_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\,\alpha\lambda\,d\lambda,$$

woraus folgt $B = -A$ und $A = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{e^{\alpha\varphi_0} - e^{-\alpha\varphi_0}}\int_0^\infty \sin\,\alpha\lambda\,d\lambda.$

Nach Einsetzung dieser Werte in (13) gestaltet sich die Lösung für die Funktion v also:

$$(31)\quad v = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{\alpha\varphi} - e^{-\alpha\varphi}}{e^{\alpha\varphi_0} - e^{-\alpha\varphi_0}} \sin\,\alpha\vartheta\,d\alpha \int_0^\infty \sin\,\alpha\lambda\,d\lambda.$$

Nun ist

$$\frac{e^{\varphi\alpha} - e^{-\varphi\alpha}}{e^{\varphi_0\alpha} - e^{-\varphi_0\alpha}} = \frac{e^{-(\varphi_0-\varphi)\alpha} - e^{-(\varphi_0+\varphi)\alpha}}{1 - e^{-2\varphi_0\alpha}},$$

oder wegen

$$\frac{1}{1-e^{-2\varphi_0\alpha}} = \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-2m\varphi_0\alpha},$$

$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(e^{-[(2m+1)\varphi_0-\varphi]\alpha} - e^{-[(2m+1)\varphi_0+\varphi]\alpha} \right).$$

Abkürzend schreiben wir für den Augenblick $(2m+1)\varphi_0 - \varphi = a$ und $(2m+1)\varphi_0 + \varphi = b$; alsdann verwandelt sich (31) in

$$(32)\quad v = \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty}\int_0^\infty \left(e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha} \right) \sin\,\vartheta\alpha\,d\alpha \int_0^\infty \sin\,\alpha\lambda\,d\lambda\,.$$

Diese so eingefügte Differenz zerlegt v in zwei Summen. Das $m$te Glied der ersten Summe hat die Gestalt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-a\alpha} \sin\,\vartheta\alpha\,d\alpha \int_0^\infty \sin\,\alpha\lambda\,d\lambda\,,$$

oder auch

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty [\cos\,(\vartheta-\lambda)\alpha - \cos\,(\vartheta+\lambda)\alpha]\, e^{-a\alpha}\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \left[\frac{a}{a^2+(\vartheta-\lambda)^2} - \frac{a}{a^2+(\vartheta+\lambda)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi a}\int_0^\infty d\lambda \left[\frac{1}{1+\left(\frac{\vartheta-\lambda}{a}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{\vartheta+\lambda}{a}\right)^2} \right]$$

oder, wenn man die Integrationsvariable z einführt, und zwar im ersten Glied, indem man $\frac{\vartheta - \lambda}{a} = z$, und im zweiten, indem man $\frac{\vartheta + \lambda}{a} = z$ setzt,

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\infty}^{\frac{\vartheta}{a}} \frac{dx}{1+z^2} - \int_{\frac{\vartheta}{a}}^{\infty} \frac{dx}{1+z^2}\right],$$

d. i.

$$\frac{1}{\pi}\left(\left[\operatorname{arctg} z\right]_{-\infty}^{\frac{\vartheta}{a}} - \left[\operatorname{arctg} z\right]_{\frac{\vartheta}{a}}^{\infty}\right) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{a},$$

oder für a seinen Wert wieder zurückgesetzt,

$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{(2m+1)\varphi_0 - \varphi}.$$

Dies ist das $m$te Glied der ersten Summe in (32); dasjenige der zweiten Summe hat demnach den Wert

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{(2m+1)\varphi_0 + \varphi},$$

sodass die Lösung für den gesuchten Wärmezustand v sich so darstellt:

$$v = \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{(2m+1)\varphi_0 - \varphi} - \operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{(2m+1)\varphi_0 + \varphi}\right], \quad \ldots \quad (33)$$

was nach Vereinigung der arctg und der Berücksichtigung, dass $\varphi_0 = \frac{\pi}{n}$, noch so geschrieben werden kann

$$v = \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty}\operatorname{arctg}\frac{2\vartheta\varphi}{\left[(2m+1)\frac{\pi}{n}\right]^2 - \varphi^2 + \vartheta^2}, \text{ wo } \vartheta = \log\frac{1}{r}.$$

Für $\vartheta = 0$ und $\varphi = 0$ wird dieser Ausdruck $= 0$ und zwar in stetiger Weise, wie es die Bedingungen vorschreiben. Um zu erkennen, dass auch der Bedingung $v_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = 1$ Genüge geschieht, denken wir uns die Glieder der Summe (33) einzeln hingeschrieben. Indem wir darauf $\varphi = \frac{\pi}{n}$ werden lassen, haben sich gegenseitig das 2. Glied der ersten Summe gegen das 1. Glied der zweiten Summe, das 3. Glied der ersten Summe gegen das 2. Glied der zweiten Summe und sofort, und das 1. Glied der ersten Summe wird $\frac{\pi}{2}$, denn der Nenner nähert sich, da $\varphi < \frac{\pi}{n}$ ist, von der positiven Seite her der Null.

III. Berechnung des von den Coordinaten r, φ und z abhängigen, mit der Zeit veränderlichen Wärmezustandes eines Cylinders.

Ein masssiver, homogener Cylinder von der Länge l besitze die Anfangstemperatur $f(r, \varphi, z)$, und während seiner Abkühlung werde seine krumme Begrenzungsfläche $r = R$ beständig auf der Temperatur $g(\varphi, z)$, seine ebenen Endflächen $z = 0$ und $z = l$ (wir legen den Anfangspunkt des Coordinatensystems in den Mittelpunkt der einen Querschnittsfläche) auf $g_1(r, \varphi)$ resp. $g_2(r, \varphi)$ erhalten. Es ist also eine Funktion Z von r, φ und z zu finden, welche folgender partiellen Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2}$$

jederzeit genügt und folgende Bedingungen zu erfüllen hat

$$(2) \quad Z_{t=0} = f(r, \varphi, z);\ Z_{r=R} = g(\varphi, z);\ Z_{z=0} = g_1(r, \varphi);\ Z_{z=l} = g_2(r, \varphi).$$

Nach der bisher eingeschlagenen Methode nehmen wir wieder eine Zerlegung der Aufgabe vor. Der Abkürzung wegen sei die rechte Seite von (1) mit $\Delta^2 Z$ bezeichnet. Die Funktion Z zerlegen wir wegen der 4 Bedingungsgleichungen (2) in folgende drei:

$$Z = S + U + V.$$

Denken wir uns in der Tabelle (A) Seite 4 die Funktionen f, g, g_1, g_2 mit den in (2) vorgeschriebenen Argumenten versehen, ferner $z = o$ anstelle von $\varphi = o$, $z = l$ anstelle von $\varphi = \frac{\pi}{n}$ gesetzt, so liefert uns dieselbe unmittelbar eine Übersicht über die Verteilung der jetzigen Grenzbedingungen; in demselben Sinne gelten jetzt die dort vorgenommenen Spaltungen der Funktionen U und V.

1. Ermittelung des Finalzustandes u.

Bedingungen:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0;$$

$$(4) \quad u_{r=R} = g(\varphi, z);\ u_{z=0} = 0;\ u_{z=l} = 0.$$

Die Lösung für diesen endlichen Cylinder führen wir auf die des unendlich langen in folgender Weise zurück. Wir verlängern den gegebenen Cylinder nach beiden Seiten hin in's Unendliche und erhalten die zur Achse senkrechten Querschnitte $z = 0, l, 2l, \ldots -l, -2l, \ldots$ desselben in der Weise auf der Temperatur 0, dass wir je zweien dieser so entstandenen, aneinanderstossenden Cylindern invers symmetrische Temperaturverhältnisse beigelegt denken. Ähnlich verfahren wir mit der Wärmeverteilung auf der Mantelfläche; jede Cylinderkante soll zu beiden Seiten eines solchen Symmetrieschnittes invers symmetrisch gelegene Temperaturverhältnisse zeigen. Bei dieser Temperaturverteilung wird der Finalzustand des unendlich langen Cylinders keinen Einfluss ausüben auf denjenigen des Cylinders von der Länge l.

Die jetzt gültigen Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} u\,(z) &= u\,(z+2l) = u\,(z+4l) = \ldots \\ &= -u\,(-z) = -u\,(-z-2l) = \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

zeigen, dass u eine ungerade Funktion von z und periodisch sein muss mit der Periode $2l$.

Die Lösung der Differentialgleichung (3) ist ein zweigliedriger Ausdruck, dessen erstes Glied mit sin z und dessen zweites mit cos z multiplizirt ist. Die beiden letzten Bedingungen (4), sowie (5) erfordern, dass wir nur das erste dieser Glieder benützen und zwar mit dem etwas veränderten Faktor sin $\alpha \frac{\pi}{l} z$, wo α eine beliebige positive Zahl ist. Der mit sin $\alpha \frac{\pi}{l} z$ multiplizirte Ausdruck enthält nun seinerseits die Cylinderfunktionen der 1. und 2. Art. Die der 2. Art ist wegen ihres Unendlichwerdens für $r = 0$ nicht brauchbar, so dass wir als Lösung von (3) erhalten

$$u = \sum_m \sum_\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{l} z \, \frac{J_m\left(\frac{\alpha i \pi}{l} r\right)}{J_m\left(\frac{\alpha i \pi}{l} R\right)} \,(A \sin m\varphi + B \cos m\varphi), \quad \ldots \quad (6)$$

wo über alle ganzen Zahlen m und α zu summiren ist. Wegen der ersten Bedingung (4) muss die Gleichung stattfinden

$$g\,(\varphi, z) = \sum_m \sum_\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{l} z \,(A \sin m\varphi + B \cos m\varphi). \quad \ldots \quad (7)$$

In dieser Gleichung müssen die Const. A und B noch bestimmt werden. Allgemein lässt sich nun die Funktion $g\,(\varphi, z)$ in eine trigonometr. Reihe von folgender Form entwickeln:

$$g\,(\varphi, z) = \sum_m \left[F_m(z) \sin m\varphi + G_m(z) \cos m\varphi\right]. \quad \ldots \quad (8)$$

In dieser Entwickelung müssen die Coeffizienten von sin $m\varphi$ und cos $m\varphi$ mit den gleichliegenden Coeffizienten der rechten Seite von (7) übereinstimmen; es muss also werden

$$F_m(z) = \sum_\alpha A_\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{l} z \text{ und } G_m(z) = \sum_\alpha B_\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{l} z.$$

Da F_m und G_m für $z = 0$ und $z = l$ verschwinden sollen und ihr Argument zwischen 0 und l willkürlich ist, so lassen sich diese Funktionen in Sin.-Reihen entwickeln, bei denen sich für die A und B nach Fourier folgende Werte ergeben:

$$A_\alpha = \frac{2}{l} \int_0^l F_m(\lambda) \sin \alpha \frac{\pi}{l} \lambda \, d\lambda \text{ und } B_\alpha = \frac{2}{l} \int_0^l G_m(\lambda) \sin \alpha \frac{\pi}{l} \lambda \, d\lambda.$$

Diese Werte der Coeffizienten, die mit Hülfe der aus (8) für $F_m(\lambda)$ und $G_m(\lambda)$ erhaltenen Werte bestimmt werden, sind schliesslich in (6) einzusetzen.

2. Ermittelung des Finalzustandes v.

Bedingungen:

$$(9) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0;$$

$$(10) \quad v_{r=R} = 0;\ v_{z=0} = g_1(r, \varphi);\ v_{z=l} = g_2(r, \varphi).$$

Bei Vermeidung der Cylinderfunktion 2. Art ergiebt sich die Lösung von (9) in der Gestalt

$$(11) \quad v = \sum_m (A \sin m\varphi + B \cos m\varphi) \sum_\alpha J_m(\alpha i r) \cdot \left(Ce^{\alpha i z} + De^{-\alpha i z}\right).$$

Die Summation inbezug auf m erstrecke sich hierbei auf alle ganzen Zahlen, diejenige bezüglich α soll auf alle Werte von α ausgedehnt werden, welche Wurzeln der Gleichung

$$(12) \quad J_m(\alpha i R) = 0$$

sind. Hierdurch wird die erste Bedingung (10) erfüllt. Die beiden letzten Bedingungen (10) benutzen wir zur Bestimmung der Grössen A, B, C und D.

Zunächst muss für $z = 0$ die Gleichung bestehen

$$(13) \quad g_1(r, \varphi) = \sum_m (A \sin m\varphi + B \cos m\varphi) \sum_\alpha J_m(\alpha i r) \cdot (C + D).$$

Durch eine Entwickelung von $g_1(r, \varphi)$ in eine Sin.-Cos.-Reihe von der Gestalt

$$(14) \quad g_1(r, \varphi) = \sum_m [F_m(r) \sin m\varphi + G_m(r) \cos m\varphi]$$

und Gleichsetzung der einander entsprechenden Coeffizienten in (13) und (14) nämlich

$$F_m(r) = \sum_\alpha A(C + D) J_m(\alpha i r) \text{ und } G_m(r) = \sum_\alpha B(C + D) J_m(\alpha i r),$$

erhalten wir nach Seite 11 die beiden Beziehungen

$$(15) \quad \begin{aligned} A_\varkappa (C_\varkappa + D_\varkappa) &= \frac{2}{R^2 \left[J'_m(\alpha_\varkappa i R)\right]^2} \int_0^R F_m(r) J_m(\alpha i r)\, r dr, \\ B_\varkappa (C_\varkappa + D_\varkappa) &= \frac{2}{R^2 \left[J'_m(\alpha_\varkappa i R)\right]^2} \int_0^R G_m(r) J_m(\alpha i r)\, r dr, \end{aligned}$$

wo $\alpha_\varkappa$ die allgemeine Wurzel der Gleichung (12) bedeutet. Andererseits geht für $z = l$ der Wert für v in (11) über in

$$(16) \quad g_2(r, \varphi) = \sum_m (A \sin m\varphi + B \cos m\varphi) \sum_\alpha J_m(\alpha i r) \cdot \left(Ce^{\alpha i l} + De^{-\alpha i l}\right).$$

Nun entwickeln wir $g_2(r, \varphi)$ in eine Cin.-Cos.-Reihe von der Form

$$g_2(r, \varphi) = \sum_m \left(\Phi_m(r) \sin m\varphi + \Psi_m(r) \cos m\varphi\right)$$

und setzen die entsprechenden Coeffizienten dieser Gleichung und (16) einander gleich. Dies ergiebt:

$$\Phi_m(r) = \sum_\alpha A\left(Ce^{\alpha il} + De^{-\alpha il}\right) J_m(\alpha ir) \text{ und}$$

$$\Psi_m(r) = \sum_\alpha B\left(Ce^{\alpha il} + De^{-\alpha il}\right) J_m(\alpha ir),$$

was wiederum nach Seite 11 die beiden Beziehungen liefert:

$$A_\varkappa\left(C_\varkappa e^{\alpha_\varkappa il} + D_\varkappa e^{-\alpha_\varkappa il}\right) = \frac{2}{R^2\left[J'_m(\alpha_\varkappa iR)\right]^2}\int_0^R \Phi_m(J_m(\alpha ir)\, rdr,$$

$$B_\varkappa\left(C_\varkappa e^{\alpha_\varkappa il} + D_\varkappa e^{-\alpha_\varkappa il}\right) = \frac{2}{R^2\left[J'_m(\alpha_\varkappa iR)\right]^2}\int_0^R \Psi_m(r)\, J_m(\alpha ir)\, rdr. \quad . \quad (17)$$

Mit Hülfe der 4 Gleichungen (15) und (17) werden die 4 Grössen A, B, C und C in (11) bestimmt.

3. Ermittelung des von der Zeit abhängigen Wärmezustandes S.

Bedingungen:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} \quad . \quad . \quad (18)$$

$$S_{t=0} = f(r, \varphi, z);\ S_{r=R} = 0;\ Z_{z=0} = 0;\ Z_{z=l} = 0. \quad . \quad . \quad (19)$$

Von den singulären Lösungen von (18), welche z betreffen, wählen wir wegen $S_{z=0} = 0$ den sin. und setzen $S = \sin \alpha z . Y$, wo Y eine Funktion von t, r und φ sein soll. Für sie ergiebt sich dann die Gleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -\alpha^2 Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}.$$

Für $t = \infty$ darf S nicht unendlich werden. Dies erfordert, dass wir vorstehender Gleichung durch folgenden Wert der Funktion Y genügen: $Y = e^{-\lambda^2 t} X$, wo λ eine beliebige positive oder negative Zahl sein kann und X eine Funktion von r und φ bedeutet. Für diese erhält man alsbald die Gleichung

$$\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} + (\lambda^2 - \alpha^2) X = 0.$$

Bezeichnet nun P eine Funktion von r allein, und setzen wir $X = P(A \sin m\varphi + B \cos m\varphi)$, so entwickelt sich nach Einsetzung dieses Wertes in die letzte Differentialgleichung die folgende für P:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} - \left(\beta^2 + \frac{m^2}{r^2}\right) P = 0,$$

wo $\alpha^2 - \lambda^2 = \beta^2$ gesetzt wurde. Dies ist die Differentialgleichung der $m$ten Cylinderfunktion mit dem Argument βir, also $J_m(\beta ir)$. Somit hätten wir also als die unserem Wärmezustand S entsprechende Lösung anzusehen:

$$S = \sum_m (A \sin m\varphi + B \cos m\varphi) \sum_\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{l} z \sum_\beta J_m(\beta ir) . e^{-\left(\left[\frac{\alpha\pi}{l}\right]^2 - \beta^2\right)t},$$

wo über alle ganzen Zahlen m und α und über alle β, welche Wurzeln der Gleichung $J_m(\beta iR) = 0$ sind, summirt wird. Vorstehende Lösung erfüllt die drei letzten Grenzbedingungen (19); damit auch der ersten genügt werde, muss die Gleichung bestehen:

$$(20) \quad . \quad f,(r, \varphi, z) = \sum_m (A \sin m\varphi + B \cos m\varphi) \sum_\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{l} z \sum_\beta J_m(\beta ir).$$

Zur Bestimmung der A und B verfahren wir ähnlich, wie wir es früher gethan haben. Wir entwickeln $f(r, \varphi, z)$ in eine Sin.-Cos.-Reihe von der Gestalt

$$f,(r, \varphi, z) = \sum_m \left[F_m(r, z) \sin m\varphi + G_m(r, z) \cos m\varphi \right],$$

dann ergiebt die Vergleichung mit (20)

$$F_m(r, z) = \sum_\alpha \sum_\beta A \sin \alpha \frac{\pi}{l} z . J_m(\beta ir)$$

und Ähnliches für G_m. Nun entwickeln wir ihrerseits F_m und G_m in Reihen nach den sin. der Vielfachen von $\frac{\pi}{l} z$, also dass man hat

$$F_m(r, z) = \sum_\alpha P_m(r) \sin \alpha \frac{\pi}{l} z,$$

und Ähnliches für G_m, woraus folgt, dass

$$P_m(r) = A_m J_m(\beta ir)$$

wird. Diese Gleichung ergiebt alsdann die Werte der noch zu bestimmen gewesenen Constanten A und B nach Seite 11.

4. Die Aufgaben für u und v. — Schlussresultat.

Es ist an dieser Stelle nur nötig, auf das Seite 13 an ähnlicher Stelle Gesagte hinzuweisen.

Vita.

Natus sum Gustavus Oscar Melchior die XIV. mens. Jun. anni h. s. LI. in Rutheniae vico, qui nominatur Crispendorf. Matrem Hedvigam a gente Swoboda maxime veneror superstitem, cum patrem Brunone Oscaro, qui mercator fuit Schleizae, hujus anni initio orbatus sim. Fidei addictus sum evangelicae. Litterarum elementis in classibus inferioribus gymnasii Schleizensis imbutus in urbis illius seminario me arte docendi excolui. Auctumno anni h. s. LXXIII., postquam privatim et diligentissime litteris studui, examen maturitatis in schola reali I. O. in arce Regiomonti instituta, Borussiae orientalis oppidi, superare mihi contigit. Deinde civis factus sum universitatis Albertinae Regiomontanae, ubi unum per annum mathematicis et physicis operam dedi et viros Ill. Richelot, Graebe, Rosenhain, Saalschütz, Zaddach, Caspary audivi. Unde ad universitatem Lipsiensem, ut litterarum studia continuarem, migravi ibique quater senos menses scholas frequentavi virorum Ill. C. Neumann, Hankel, Scheibner, Mayer, Vondermühll, Zöllner, Bruhns, Schenk, Heinze, Wundt. Hoc post tempore Halas Saxonum ad litterarum studia absolvenda transii scholasque frequentavi virorum Ill. Heine, Cantor, Erdmann, Thiele. Kraus, v. Fritsch. Exercitationibus seminarii mathematici Lipsiae, quas Ill. Neumann et Halis, quas Ill. Heine moderabantur, interfui.

Omnes quos nominavi viros optime de me meritos semper gratum animum servabo. Jam vero examine pro facultate docendi Halis mense Maj. anni h. s. LXXVIII. superato, Fuldam me contuli, ut in progymnasio reali praeceptoris munus, quo adhunc fungor, subirem.

J. L. Uth's Hofbuchdruckerei in Fulda.